山重慎二［著］『財政学（ベーシック＋）』中央経済社

Check 問題の解答例

2016 年 3 月 11 日

山重慎二

第 1 章　政府の役割

問題 3.*

需要曲線を、個人の効用最大化問題を解くことで導出してみよう。

2 つの財 x と y が存在する場合を考えてみます（x と y は財の名前であるとともに、その量を表しているとします）。効用（満足度）は、2 つの財の消費量によって変化し、$U(x,y)$ で表わされると仮定します。それぞれの財の価格を p および q、所得を I とすれば、予算制約式は、$px+qy=I$ と書けます。「予算制約の下で、x と y の量を上手に選んで効用を最大化しなさい」という効用最大化問題は、以下のように書くことができます。

$$\max_{x,y} \quad U(x,y) \quad \text{s.t.} \quad px+qy=I \tag{1}$$

ここで、“s.t.” は「以下の制約の下で」という意味の英語 “subject to” の省略形です。

この問題で、p、q および I は、外から与えられた変数（**外生変数**）であると仮定すれば、その変化に応じて、最適な x と y の需要量が決まります。したがって、x および y への最適な需要量は、それぞれ $x=X_d(p,q,I)$ および $y=Y_d(p,q,I)$ という関数で表現されます。

これが、それぞれの財に対する需要関数です。ここで、財 x とその価格 p に注目して、最適な需要量 x と価格 p の関係を図に描いたものが、需要曲線となります（図表 1-2 の右下がりの曲線）。なお、需要曲線は、簡単化のため、直線で描かれることが多いのですが、一般に直線になるとは限りません。

効用最大化問題（制約付きの最適化問題）については、以下の Check 問題で何度も出てきますので、このノートの最後に設けた補論 1 で、図解する方法を説明しました。必要に応じて参考にして下さい。

問題 4.*

供給曲線が、企業の利潤最大化問題を解くことで導出してみよう。

財 x の価格を p、財 x を生産するために必要な費用を関数 $C(x)$ で表せば、収入 px から費用 $C(x)$ を引いた利潤は、$\Pi(x) \equiv px - C(x)$ と書けます（記号 $\equiv$ は「以下のように定義する」という意味の数学記号です）。「x の量を上手に選んで利潤を最大化しなさい」という利潤最大化問題は、以下のように書けます。

$$\max_{x} \; px - C(x) \tag{2}$$

この問題で、価格 p は外から与えられた外生変数であると仮定すれば、その変化に応じて、最適な x の供給量（生産量）が決まると考えられます。したがって、最適な供給量は、$x=X_s(p)$ という関数で表現されます。これが供給関数であり、この関数を図に描いたものが、供給曲線です（図表 1-2 の右上がりの曲線）。供給曲線も、簡単化のため、直線で描かれることが多いのですが、一般に直線とは限りません。

なお、利潤最大化問題のような制約なしの最大化問題についても、1 階条件と呼ばれる最適条件の直感的な説明とともに、このノートの最後の補論 2 で説明しています。必要に応じて参考にして下さい。

第2章　市場と政府

問題 5.*

p を価格、x_d を需要量、x_s を供給量とする。需要関数が $x_d = 4 - p$、供給関数が $x_s = p$ で与えられる時の市場均衡における価格と取引量は、それぞれ $p = 2$ および $x = 2$ によって与えられることを説明しよう。

市場均衡は $x_d = x_s$ となる状態ですので、$4 - p = p$ という等式で特徴付けられます。この等式を解くことにより、市場均衡での価格は $p = 2$ となることがわかります。取引量は、需要関数または供給関数に $p = 2$ を代入することで、$x(= x_s = x_d) = 2$ となることがわかります。

問題 6.*

上記 5. の市場均衡における消費者余剰と生産者余剰は、それぞれ 2 となることを説明しよう。また、取引量が 1 となった場合の死重損失は、1 となることを説明しよう。

市場均衡は、以下の図 1 の点 e のようになります。消費者余剰と生産者余剰は、それぞれ需要曲線の下の三角形 $(4e2)$ および供給曲線の上の三角形 $(0e20)$ の面積で表わされますので、それぞれ $0.5 \times 2 \times 2 = 2$ となります。また、取引量が 1 の時の死重損失は、三角形 (bea) の面積で表わされますので、$0.5 \times 2 \times 1 = 1$ となります。これは、取引量が 1 となった場合、消費者が得られる総便益は台形 $(4b10)$ の面積、生産者が負担する費用は供給曲線の下の三角形 $(0a1)$ の面積であり、社会的余剰が台形 $(4ba0)$ の面積となるために、市場均衡の時の社会的余剰である三角形 $(4e0)$ の面積より小さくなってしまう社会的余剰の大きさを表しています。

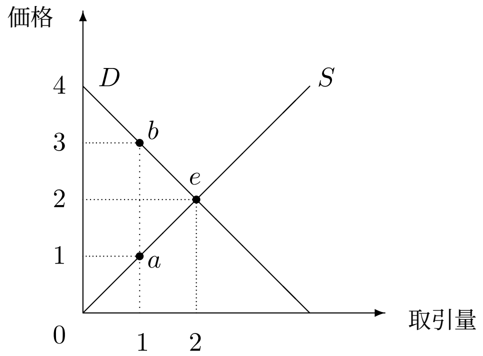

図 1: 消費者余剰・生産者余剰・死重損失

第 4 章　公共財

問題 4.*

公共財と私的財から効用を得る n 人の個人を想定し、最適化問題を解くことで、サミュエルソン条件を導出してみよう。

公共財と私的財が存在する簡単なモデルにおいて、公共財の最適供給の問題を考えてみます。第 i 個人の効用は、私的財消費量 x_i と純粋公共財消費量 G の関数 $u_i(x_i, G)$ として表現され、生産に関しては、私的財の総生産 $X = \sum_{i=1}^n x_i$ と純粋公共財 G の生産に関する資源制約を示す生産可能性フロンティア $X = H(G)$ で表現されるものとします（記号 $\sum_{i=1}^n$ は、$i = 1$ から n まで足し合わせるという記号で、$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ です）。

パレート効率的な状態（誰かの満足度を、他の人の満足度を下げることなく引き上げることはできない状態）は、第 1 個人以外の個人 i（$i = 2, 3, \ldots, n$）については、効用を $\bar{u}_i$ に固定した上で、第 1 個人の効用を最大化する問題を解くことで求めることができます。具体的には、次のような問題を解くことによって求められます。

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n, G} u_1(x_1, G) \quad \text{s.t.} \quad u_i(x_i, G) = \bar{u}_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = H(G) \tag{4}$$

このような制約条件付きの最大化問題は、以下のようなラグランジュ未定乗数法によって解くことができます（ラグランジュ未定乗数法の概要は補論 2 を参考にして欲しいと思いますが、詳しくは経済数学の本などで調べて下さい）。ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ を以下のように定義します。

$$\mathcal{L} \equiv u_1(x_1, G) - \sum_{i=2}^n \lambda_i (u_i(x_i, G) - \bar{u}_i) - \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - H(G)) \tag{5}$$

ここで、λ_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ および λ はラグランジュ乗数と呼ばれます。パレート効率的な状態は次のような「1 階条件」によって特徴づけられます（以下では、∂（ラウンドと読む）は偏微分の記号を、$H'(G)$ は関数 H の微分を、それぞれ表しています）。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \cdots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \tag{6}$$

各条件は次のように書くことができます。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial x_1} = \lambda \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial x_i} = \lambda \;\; (i = 2, \ldots, n) \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial G} - \lambda_2 \frac{\partial u_2(x_2, G)}{\partial G} - \cdots - \lambda_n \frac{\partial u_n(x_n, G)}{\partial G} = -\lambda H'(G) \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_i(x_i, G) = \bar{u}_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = H(G) \tag{11}$$

ここで、(9) 式を λ で割り、(7) 式および (8) 式を用いることで次式を得ます。

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial G}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial G}}{\frac{\partial u_2}{\partial x_2}} + \cdots + \frac{\frac{\partial u_n}{\partial G}}{\frac{\partial u_n}{\partial x_n}} = -H'(G) \tag{12}$$

私的財と純粋公共財の間の第 i 個人の限界代替率および限界変形率を、それぞれ MRS_i および MRT で表現すれば、この (12) 式は、 $MRS_1 + MRS_2 + \cdots + MRS_n = MRT$ と簡単に表記することができます。これがサミュエルソン条件として知られている条件です。

第 5 章　経済政策

問題 4.*

図表 5-1 のように、平均費用は、それが最低となる生産水準（x_+）で、限界費用と一致する。その理由を、本章での説明をもとに説明してみよう。

ここでは、まず、本文で説明したように、「平均費用が低下している時には、限界費用は平均費用を下回っているはず」ということを説明してみます。そのために、限界費用（生産の増加に伴い追加的に発生する費用）が平均費用（生産 1 単位あたりの費用）を下回っていれば、追加生産により平均費用は低下する一方、限界費用が平均費用より大きければ、追加生産により平均費用は低下するということを説明します。

直感的に考えるために、生産量が個数で表わされるとしましょう。現在、1 個生産しており、その平均費用（＝費用）が 10 であるとします。ここで、次の 1 個の生産のための費用（＝限界費用）が 8 であれば、2 個生産する時の平均費用は 9 $(= (10 + 8)/2)$ になります。つまり、限界費用が平均費用を下回れば、平均費用は追加生産により低下します。一方、次の 1 個の生産のための費用（＝限界費用）が 12 であれば、2 個生産する時の平均費用は 11 $(= (10 + 12)/2)$ になりますので、限界費用が平均費用を上回れば、平均費用は追加生産により増加します。したがって、「平均費用が低下している時には、限界費用は平均費用を下回っているはず」ということになります。

さて、限界費用が、以下の図 2 のように右上がりの曲線で表わされるとします。上記のような平均費用と限界費用の関係が存在することを踏まえると、限界費用が平均費用より小さい生産量水準（図 2 の x_+ の左側の領域）では、平均費用曲線は右下がりになる一方、限界費用が平均費用より大きい生産量水準（図 2 の x_+ の右側の領域）では、平均費用曲線は右上がりになるので、結局、平均費用は、それが最低となる生産水準（x_+）で、限界費用と一致することがわかります。

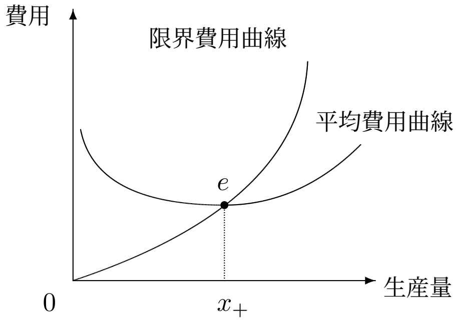

図 2: 平均費用と限界費用

第 7 章　社会政策

問題 5.*

教育への 3 つのタイプの補助金の効果の比較を、効用最大化問題（教育とその他の消費財の選択問題）を図解した図を用いて説明してみよう。

教育水準を x、その他の消費財の水準を C で表すとします。教育の価格を p、その他の消費財の価格を 1 とすれば、所得 I の下での予算制約は $C + px = I$ によって与えられます。効用関数は $U(x, C)$ で表されるとします。

ここで、3 種類の教育補助方式を考えます。それぞれの補助の下での予算制約は、以下のようになります ($\min\{px, S_E\}$ という記号は、px と S_E のいずれか小さい値をとるという関数です)。

$$\text{(教育支出を } s_E \text{の率で補助する) 定率補助} \quad : \quad C + (1 - s_E)px = I \tag{13}$$

$$\text{(} S_E \text{の所得を与える) 所得補助} \quad : \quad C + px = I + S_E \tag{14}$$

$$\text{(} S_E \text{を上限として教育支出を補助する) 定額補助} \quad : \quad C + px = I + \min\{px, S_E\} \tag{15}$$

それぞれの予算制約式は、図 3 の線分 bb''、線分 aa'、線分 bea' で表わされます。線分 bb' は補助がない場合の予算制約です（最適点の選択については補論 1 を参考にして下さい)。

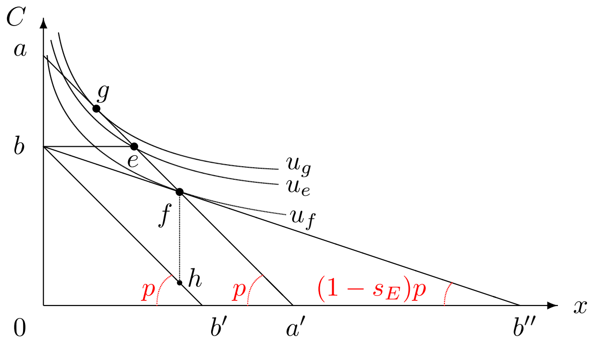

図 3: 教育補助の効果の違い

(1) 定率補助 v.s. 所得補助

定率補助の下での予算制約は線分 bb'' で表わされます。定率補助の下で選択される最適点は、図 3 の点 f になると仮定します。この時の補助額は、消費の増加額を示す線分 fh の大きさで表わされます。この額を所得補助の形で給付すれば、線分 aa' が予算制約となります。この時に、選択されるのは、点 f より高い消費を享受できる点 g であり、効用は高くなりますが、教育水準は低くなることがわかります。

(2) 所得補助 v.s. 定額補助

ここで、定額補助は、教育支出に対してのみ支払われますので、補助前の最大消費可能水準 b を超える消費は行えないため、予算制約は線分 bea' となります。この予算制約は、線分 aa' の一部分ですので、所得補助の場合と比べると消費を低く抑えざるをえません。その結果、高い教育を選択することになるのですが、効用は低くなることがわかります。

以上の 2 つの結果をまとめると、教育水準に与える効果に関しては、定率補助が最も効果が大きく、定額補助、所得補助、と徐々に小さくなっていく一方で、個人の効用に関しては、所得補助が最も大きく、定額補助、定率補助と小さくなることがわかります（厳密に言えば、異なる補助方式の下で全く同じ点が選ばれる可能性がありますので、大小関係は「等しい場合」を含みます)。

第 8 章　税制の設計

問題 4.*

図表 8-3 の状況で、供給曲線が水平でなく、右上がりになった場合、供給の弾力性と死重損失の関係を説明してみよう。

図 4 は、右上がりの供給曲線（S）の下で、t の課税（従量税）が行われたケースを描いています。増税により、供給曲線は S から S' となり、市場均衡は e から f に変化します。取引量は x^* から x^{**} に低下し、死重損失は三角形 (efg) の面積で表わされます。その面積は $0.5t(x^* - x^{**})$ で計算されます。

ここで、取引量の変化を表す $(x^* - x^{**})$ の大きさは、税率が大きいほど大きくなり、需要曲線と供給曲線が直線であれば、以下で見るように、一般に定数 c を税率 t に乗じた ct と表現することができます。したがって、供給曲線が右上がりであっても、死重損失は $0.5ct^2$ のように書けますので、税率の 2 乗に比例するという結果に大きな変化はないことがわかります。

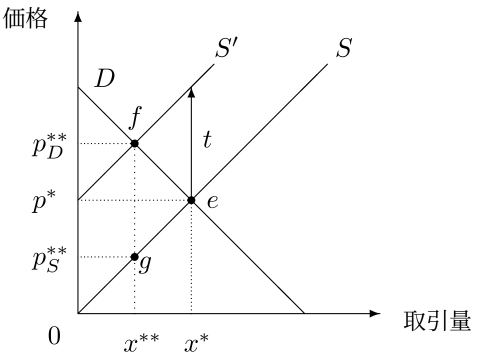

図 4: 課税と死重損失

ここで、需要関数が $x = a_D - b_D p$、供給関数が $x = a_S + b_S(p - t)$ と書ける場合を考えてみます。この時、均衡価格は、$a_D - b_D p = a_S + b_S(p - t)$ を解くことにより、$p = (a_D - a_S + tb_S)/(b_D + b_S)$ となります。これを需要関数に代入することで、以下のように均衡取引量を求めることができます。

$$x = a_D - b_D \frac{a_D - a_S + tb_S}{b_D + b_S} = \frac{a_D b_S + b_D a_S - tb_D b_S}{b_D + b_S} \tag{16}$$

ここで、$c \equiv b_D b_S/(b_D + b_S)$ と定義すれば、上述のように、税率が 0 から t に上昇することで、生産量は ct だけ減少することがわかります。

さて、$c = b_D/(b_D/b_S + 1)$ と書けますので、供給曲線の傾き b_S で表される供給の価格弾力性が大きいほど、c は大きくなります。つまり、供給の価格弾力性が大きいほど、死重損失は大きくなることがわかります（需要の価格弾力性についても全く同様の結果が得られることは、数式でも簡単に確認できますね）。

問題 5.*

労働所得税の引き上げが生み出す非効率性（死重損失）を、労働市場を図解した図を使って説明してみよう。

賃金率（実質）を w とします。また、簡単化のため、雇用に関わる税や社会保障負担は考慮しないものとしましょう。この時、労働需要曲線は、賃金率の減少関数 $L^D(w)$ で表すことができます。一方、労働供給曲線は、労働所得税を t_y とすれば、税引後の賃金率 $(1-t_y)w$ の関数 $L^s((1-t_y)w)$ として表されることになります。

図 5 は、この労働需要曲線（D）と労働供給曲線（S）を描いた図です（課税の非効率性は代替効果によって発生しますので、死重損失を分析する際は、賃金率の変化の代替効果のみを考えれば良く、労働供給曲線は右上がりとなると仮定できます）。

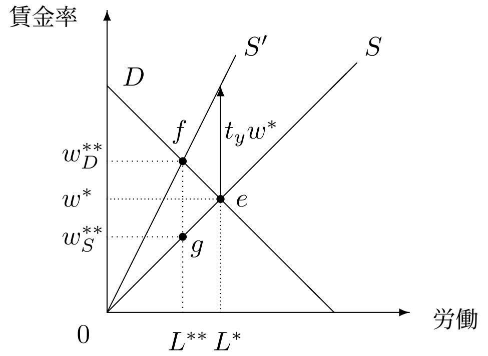

図 5: 労働所得税と死重損失

労働所得税が存在しない場合の労働供給曲線を S とすれば、税率 t_y の労働所得課税が導入されると、労働者は高い賃金を求めるようになるため、労働供給曲線は S' のようになります。この結果、労働市場の新しい均衡は f となります。均衡における労働賃金率は上昇し、労働量は減少します。そして、労働者の税引後の賃金率は w_S^{**} にまで低下します。

課税によって、市場での労働量は L^* から L^{**} にまで低下します。このような課税に伴う労働の減少で発生する非効率性（死重損失）は、近似的に、三角形 (efg) の面積で表されることになります。

第9章　直接税

問題 3.*

上記 2. のような現象（個人所得税の引き上げが、人々の労働供給を増加させること）が見られることを、効用最大化問題を図解した図を用いて説明してみよう。

簡単な効用最大化問題を考えます。消費を c、余暇時間を ℓ、利用可能な総時間を H、賃金率を w、不労所得を I とすれば、予算制約式は $c = w(H - \ell) + I$ と表せます（余暇時間以外は働くと仮定）。消費の価格は 1 と仮定します。効用関数は $U(\ell, c)$ としましょう。いま、課税前の賃金率は w_b であると仮定し、課税後の（手取り）賃金率は w_a で表わされると仮定します。

課税前の予算制約は、図 6 の線分 GJH で表わされます。余暇時間の上限は H で、すべての時間を余暇に用いたとしても不労所得 I の消費が可能です。余暇時間を減らし、労働時間を増やせば、賃金率 w_b の率で所得が増えますので、消費を増やすことができます。したがって、予算制約は線分 GJH で表されます。

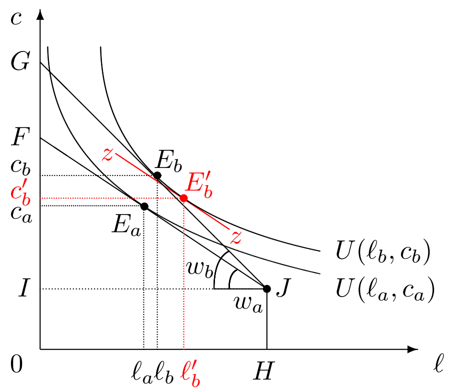

図 6: 労働所得税の効果

効用最大化問題は、以下のように書くことができます。

$$\max_{\ell, c} \; U(\ell, c) \;\; \text{s.t.} \;\; c = w_b(H - \ell) + I \tag{17}$$

この問題の解は、図 6 では、予算制約式を示す線分 GJH と無差別曲線が接する点 E_b で表わされます（補論 1 も参考にして下さい）。ここで、課税後の賃金率が w_a となれば、予算制約は線分 FJH となり、課税後の最適な点は E_a となります。この時の最適な余暇時間 ℓ_a は、課税前の最適な余暇時間 ℓ_b よりも短くなっています。つまり、課税後の労働時間は増えることになります。

課税後、労働供給が増える理由は、課税の効果を**所得効果**と**代替効果**に分けるとわかりやすく説明できます。図 6 中の補助線 zz は、課税後の予算線 FJ に平行で、点 E_b を通る無差別曲線 $U(\ell_b, c_b)$ に接する補助線です。その接点 E'_b への E_b からの移行は、賃金率の低下により余暇時間が増える代替効果を表しています。この代替効果により、余暇時間は増え、労働時間は減少します。

一方、接点 E'_b から点 E_a への移行は、予算線の平行移動によるものであり、課税（賃金率の低下）による実質的な所得の低下の効果を表しており、所得効果と呼ばれます。余暇時間は正常財という仮定の下で、余暇時間は低下し、労働時間は増加します。

このように、賃金率が労働時間に与える影響は、代替効果と所得効果で異なります。図 6 のように、所得効果が代替効果を上回るなら、労働時間は増加します。税引後の賃金率の低下に伴う所得の下落を補うように、もっと働くことを選ぶようになるということです。

労働所得税を引き上げると人々は働かなくなると主張されることが多いのですが、実際には、労働時間を増やす人たちが出てくる可能性があります。税金が高い国々の中には、女性の労働参加率が高い国は多いのですが、可処分所得を増やすために労働時間を増やしていると考えることもできそうです。

問題 4.*

個人所得税の引き上げが、人々の貯蓄に与える影響を効用最大化問題を図解した図を用いて説明してみよう。

税が貯蓄に与える効果を分析するために、最も簡単な 2 期間モデルを考えてみましょう。若年期と老年期の 2 期間を考え、所得 y は若年期のみに発生し、老年期は若年期の貯蓄 S の元利で生活するものと想定します。利子率を r、若年期および老年期の消費をそれぞれ c_1 および c_2 とすれば、若年期の予算制約は $c_1 + S = y$、老年期の予算制約は $c_2 = (1+r)S$ と書き表せます（遺産等は考えないものとします）。

ここで 2 つの予算制約を、貯蓄 S を通じてまとめると $c_2 = (1+r)(y-c_1)$ となります。これは、**生涯にわたる予算制約式**と呼ばれます。またこの式は、以下のように、若年期の価値で表現することもできます。

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y \tag{18}$$

ここで $c_2/(1+r)$ は老年期の消費の**割引現在価値**とも呼ばれ、老年期の消費の価値を若年期の消費の価値で評価したものです。若年期の消費と（若年期の価値で評価した）老年期の消費は、若年期の所得ですべてまかなわれなければならないという制約が、生涯にわたる予算制約です。

さて、効用関数が $U(c_1, c_2)$ とすれば、効用最大化問題は、以下のように表現されます。

$$\max_{c_1, c_2} U(c_1, c_2) \quad \text{s.t.} \quad c_2 = (1+r)(y-c_1) \tag{19}$$

ここで、利子所得に対する課税の効果を考えてみます。課税前の利子率を r_b とすれば、この問題の解は、図 7 では、予算制約式を示す線分 gy と無差別曲線が接する点 E_b で表わされます（図では $R_a \equiv (1+r_a)$ および $R_b \equiv (1+r_b)$ としています）。

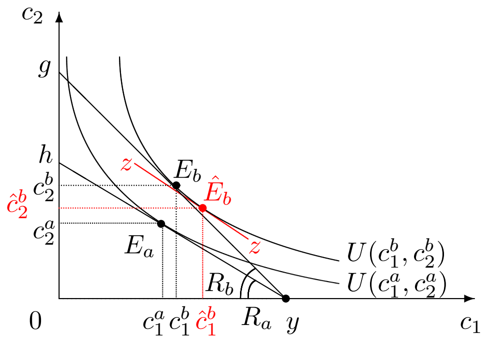

図 7: 利子所得税と貯蓄

貯蓄は、若年期の所得 y から消費 c_1^b を引いた額になりますので、$S = y - c_1^b$ です。一方、利子所得への課税の結果、課税後の利子率が r_a に低下したとすれば、予算制約は線分 hy となり、最適な選択は E_a となります。課税後の最適な貯蓄は $S = y - c_1^a$ となり、利子率の低下の結果、貯蓄が増えることがわかります。

このように、利子率の低下が貯蓄を増加させるのは、課税による利子所得の低下を補うために、課税前より貯蓄を増やそうとする所得効果が働いているからと説明できます。

利子所得課税の強化は、貯蓄を低下させ、資本の蓄積を低下させると主張されることがあります。これは、利子率の低下により貯蓄の意欲が低下する代替効果のみに注目した議論であり、所得効果にも注目するならば、必ずしも正しいとは言えないことには注意が必要です（図 7 では、利子所得課税の効果を所得効果と代替効果に分解するために、補助線 zz および接点 $\hat{E}_b$ が描かれていますので、前頁の問題 3 への解説も参考にしながら、課税の効果を所得効果と代替効果に分解してみて下さい）。

第10章　間接税と税制改革

問題 3.*

若年期と老年期の 2 期間モデルで、予算制約式を考え、消費税は比例労働所得税と等価であり、利子所得には課税しないことを説明してみよう。

すでに見た第 9 章の問題 4 で用いた簡単な 2 期間モデルにおいて、若年期の所得を y_1、老年期の所得を y_2 とすれば、生涯にわたる予算制約式は以下のようになります。

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \tag{20}$$

消費税率を $t_c(>0)$ とすれば、生涯にわたる予算制約式は、以下のようになります

$$(1+t_c)(c_1 + \frac{c_2}{1+r}) = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \tag{21}$$

この式は以下のように書き換えられます。

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = \frac{1}{1+t_c}(y_1 + \frac{y_2}{1+r}) \tag{22}$$

ここで $1/(1+t_c) < 1$ ですので、$1/(1+t_c) = 1 - t_y$ という関係式で定義される値 t_y が存在し、消費税の下での上記の予算制約式は、以下のように書き換えられます。

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (1-t_y)(y_1 + \frac{y_2}{1+r}) \tag{23}$$

これは、労働所得に対して、税率 t_y で比例的に課税された場合の予算制約式と全く同じです。つまり、消費税は比例労働所得税と等価であると考えられます。

上記の生涯にわたる予算制約式が示しているのは、消費税は本質的に生涯にわたる労働所得への課税であり、利子所得（rS）に全く課税することはないということです。

問題 4.*

上記 3. のモデルを用いて、消費税の引き上げが、（将来の納税への備えとしての）貯蓄を増加させることを説明しよう。

上述のように、消費税と比例労働所得税は本質的に同じであり、選択される消費 (c_1^*, c_2^*) も同じとなります。しかし、貯蓄に対しては、若干異なる効果を持ちます（消費税の下で正の貯蓄が行われることを仮定します)。消費税の場合の貯蓄は、$S_{t_c} = y_1 - (1+t_c)c_1^*$ となる一方、等価となる比例労働所得税の下での貯蓄 S_{t_y} は、以下のようになります（式の書き換えでは、上記の t_y と t_c の関係式を用いています)。

$$S_{t_y} = (1-t_y)y_1 - c_1^* = \frac{1}{1+t_c}y_1 - c_1^* = \frac{1}{1+t_c}(y_1 - (1+t_c)c_1^*) = \frac{1}{1+t_c}S_{t_c} < S_{t_c} \tag{24}$$

つまり、消費税の下での貯蓄の方が、（等価となる）労働所得税の下での貯蓄よりも大きくなることがわかります。これは、所得税では、所得が発生した段階ですべて課税されますが、消費税では若年期に消費した所得にのみ税負担が発生し、課税されなかった所得の税負担は老年期に支払うことになるため、消費者はその負担分を蓄えておく必要があるからと説明できます。

第 11 章　政府の借金

問題 5.*

若年期と老年期の 2 期間モデルで、中立命題を説明してみよう。また、流動性制約がある場合は、中立命題は成立しないことを説明してみよう。

流動性制約の影響を 2 期間モデルで説明するために、前頁の予算制約式 (20) を考えます。ここで、若年期に、公債発行により、国民 1 人当たり D の減税を行い、老年期に公債の返済のための増税 $(1+r)D$ を行うとします（r は公債の利子率)。この場合の予算制約式は、以下のようになり、減税を行わない時と全く同じになることがわかります。つまり「中立命題」が成立することがわかります。

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + D + \frac{y_2 - (1+r)D}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \tag{25}$$

流動性制約がある場合の効果は、図を用いてわかりやすく説明できます。若年期と老年期に所得がある場合、予算制約は、図 8 の線分 GF のように表されます。

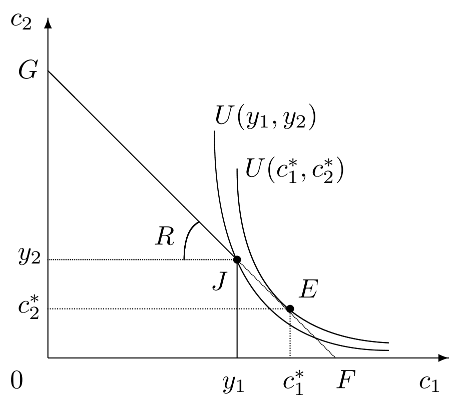

図 8: 流動性制約と中立命題

貯蓄も借り入れも行わない場合の消費の組み合せは (y_1, y_2) となりますので、予算制約式は点 J を通ります。この点の左側では、消費者は若年期に所得 y_1 よりも少ない消費を行いますので、貯蓄が行われます。貯蓄からの収益率を $R(= 1+r)$ とすれば、若年期の消費 c_1 を少しずつ減らしていくことで、老年期の消費 c_2 を R の率で増やしていくことができます。

ここで、利子率 r で借り入れを行えるのであれば、J の右側の領域でも選択を行えます。この領域では、若年期の消費 c_1 を増やしていくと、老年期の消費 c_2 を R の率で減らしていくことになります。図 8 では、最適な消費選択が、この領域の中の点 E で行われるケースが描かれています。消費者は $c_1^* - y_1$ の借り入れを行い、老年期に $y_2 - c_2^*(= (1+r)(c_1^* - y_1))$ の返済を行います。

ところが、一般に、消費者は貯蓄の利子率 r で借り入れを行うことはできず、流動性制約（借り入れ制約）に直面しています。例えば、全く借り入れが行えない場合、予算制約は線分 GJy_1 となり、図 8 では、この時の最適な消費選択は点 J になります。

さて、ここで、政府が、利子率 r で公債発行を行い、$c_1^* - y_1$ の減税を行い、$(1+r)(c_1^* - y_1)$ の増税を老年期に行うとします。このような政策により、流動性制約に直面していた個人の予算制約は、線分 GJy_1 から線分 GEc_1^* に拡大します。その結果、消費選択は J ではなく E になると考えられます。減税額が上記の額より少ない場合は、最適な選択 E を行うことはできないでしょうが、予算制約が拡大しますので、消費行動は変化します。つまり、中立命題が成立しなくなります。ここでは、借り入れを行えない個人に代わって、政府が安い金利で借り入れを行ってあげることで、若年期の消費が拡大したと考えることができます。

第 12 章　地方分権

問題 4.*

地方政府の予算制約と効用関数があると想定して、上記 3. の問題（一般定額補助金と特定定率補助金は、それぞれ、どのような目的のための補助金としてふさわしいか）に対して図を用いて説明してみよう。

簡単なモデルとして、2 つの種類の公共財 G_1 と G_2 があり、地方政府は、税収 T の下での予算制約 $pG_1 + G_2 = T$ を考慮して、（代表的な）住民の効用 $U(G_1, G_2)$ を最大化すると仮定します（G_1 の価格は p、G_2 の価格は 1 と仮定)。

ここで、2 つの公共財が他の地域になんら外部性を持たない場合と、1 つの公共財（G_1）が他の地域に正の外部性を持つ場合（例えば、教育や子育て支援などの場合）を想定してみます。

外部性に関する議論（例えば第 7 章）が示唆するように、外部性が存在する財に関しては、その価格を引き下げるようなピグー補助金を与えて、供給を促すことが望ましいことになります。実際、地方政府の当初の予算制約が bb' で与えられている時、財 G_1 に対して特定定率補助金が s_{G_1} の率で与えられるならば、予算制約は $(1 - s_{G_1})pG_1 + G_2 = T$ となります。その結果、予算線は、図 9 の線分 bb'' のようになり、地方政府が選ぶ公共財の組み合せは点 e になると考えられます。

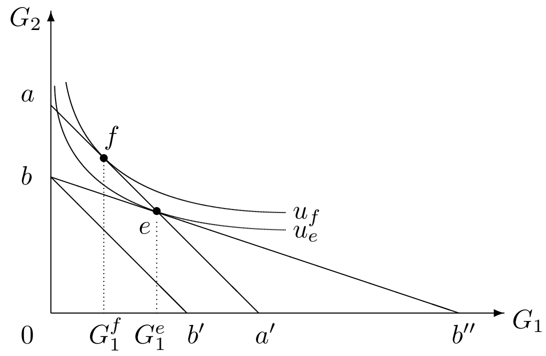

図 9: 特定定率補助金と一般定額補助金

この点 e を通り、bb' に平行な線分 aa' は、上記の特定定率補助金と同じ財源を、一般定額補助金で地方政府に与えた場合の予算制約です。この時、地方政府が選ぶ公共財の組み合せは、点 f になると考えられます。この時の地方政府の効用 u_f は、特定定率補助金の下での効用 u_e よりも高くなります。

従って、いずれの公共財も外部性を持たないならば、一般定額補助金の方が国民の効用を引き上げるという観点から望ましいと言えるでしょう。しかしながら、例えば公共財 G_1 が外部性を持つ場合、一般定額補助金の下で選ばれる水準 G_1^f は、低い水準にとどまります。

国庫支出金のような特定定率補助金の下では、正の外部性を持つ公共財が高い水準 G_1^e で選ばれることになり、地方政府の効用は低下しますが、日本全体から見れば望ましい選択が行われるようになります。したがって、外部性が大きい公共財の充実のためには特定定率補助金を活用する一方で、そのような外部性が存在しない場合は、一般定額補助金を活用することが望ましいと考えられます。

上記の分析が示唆することは、地方政府は、常に、特定定率補助金（国庫支出金など）よりも一般定額補助金（地方交付税交付金など）を好むだろうということです。しかし、日本全体の厚生を考えると、一般定額補助金よりも特定定率補助金の方が望ましい場合が少なくなくありません。どのような目的で補助を行うのかを考えた上で、望ましい補助方式を考えることが重要です。

第 13 章　政治の仕組み

問題 4.*

全員一致制の下ではパレート最適な選択が行われるが、多数決制の下ではパレート最適な選択が行われるとは限らないことを説明してみよう。

2 つのタイプ（タイプ 1 およびタイプ 2）の個人を考え、各タイプの効用を U_1 および U_2 と表すことにしましょう。また、多数決制の下での選択を考えるために、タイプ 1 とタイプ 2 の割合は 1 対 2 であるとします。図 10 の中の曲線 $f_1 f_2$ は、効用フロンティアを表しています。これは、社会の資源をパレート効率的に利用した時に実現する効用の組み合せを描いたものです。

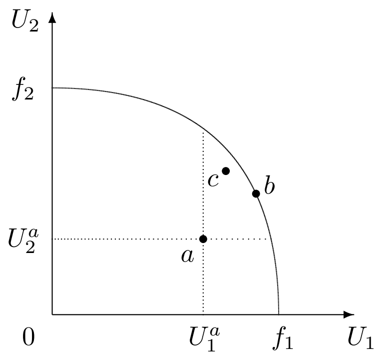

図 10: 多数決制と全員一致制の下での選択

タイプ 1 とタイプ 2 の効用の組み合せが、現在、点 a にあるとします。点 a は効用フロンティアの内側にありますので、現状はパレート非効率的な状態にあることがわかります。ここで、点 b と点 c が提案されたとしましょう。点 b は効率的な状態、点 c は非効率的な状態です。

まず、多数決制の下では、多数派となるタイプ 2 が好む状態が選択されますので、点 c が選ばれるはずです。しかしながら、タイプ 1 にとっては、点 c よりも点 b の方が好ましいので、全員一致制の下では、タイプ 1 は、点 c を拒否し、点 b が選ばれることを主張すると考えられます。点 b は、すべてのタイプにとって点 a よりも望ましいため、全員一致制の下で合意が得られるとすれば、パレート効率的な点 b になると考えられます。

言うまでもなく、b と c 以外の提案を行えるのであれば、多数決制の下でも、多数派の結託を通じてパレート効率的な点が選ばれる可能性はあります（上記の設定の下で、図 10 ではどのような点が選ばれるか考えてみてください）。また、全員一致制の場合には、効率的な点のうちどれを選択するかで争いとなり、合意に達することができない可能性があります。全員一致制の問題としてよく理解しておくことが大切です。

補論 1：効用最大化問題の図解

効用最大化問題（制約付き最大化問題）を図解してみよう。

予算制約 $px + qy = I$ の下で、x と y の量を上手に選んで効用 $U(x, y)$ を最大化するという以下の効用最大化問題を図解してみます。

$$\max_{x,y}\ U(x, y) \quad \text{s.t.}\ \ px + qy = I$$

まず、予算制約式は、$y = \frac{I}{q} - \frac{p}{q}x$ と書き直せますので、横軸に x、縦軸に y をとった図 11(**A**) では、切片 $\frac{I}{q}$、傾き $-\frac{q}{p}$ の右下がりの直線として表されます。ただし、x と y がそれぞれ 0 以上となる線分が、実際には選択可能な「予算線」となります。

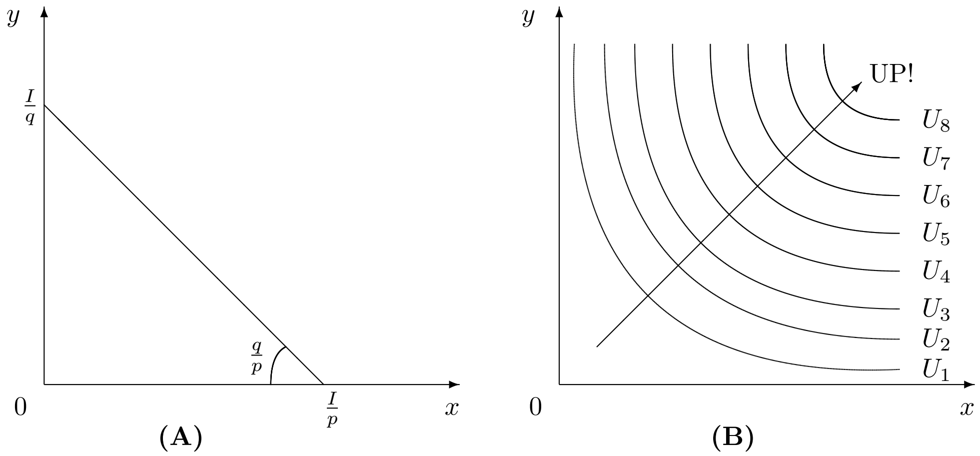

図 11: 予算制約と無差別曲線

次に効用関数 $U(x, y)$ も、横軸に x、縦軸に y を縦軸にとったグラフ（以下、x-y 平面と呼びます）の上で表現したいのですが、残念ながら、$U(x, y)$ という関数は、x-y 平面の上に、もう一つ軸（z 軸）をとることで表現できる関数です。

効用関数 $z = U(x, y)$ は、x と y がそれぞれ増加すると値が増加していく関数ですので、x-y 平面の上に z 軸をとった 3 次元のグラフでは、x と y が大きくなるほど高くなっていく山のように表現されます（3 次元の図をイメージしてみましょう）。

実は、山のような 3 次元の物体を平面（2 次元）で表現する方法があります。例えば、地図です。地図では、山の高さ（高度）を「等高線」で表現します。等高線とは、（z 軸の）高さが同じとなる x-y 平面上の点を集めた曲線です。

経済学でも、効用関数を x-y 平面上に表現するために、効用の山を「等高線」を使って、図 11(**B**) のように描きます。その図では、U_1 が低い水準の等高線であり、U_8 に向かうにつれて効用の山が高くなっていきます（等高線を見ながら、効用関数の形をイメージをしてみましょう）。

このような効用の山の等高線は、効用の高さが同じとなる x-y 平面上の点（x と y の消費の組み合せ）を集めた曲線です。効用水準が同じ 2 つの点は、満足度の観点からは、無差別（どちらが選ばれても良い）と考えられますので、経済学では、効用の山の等高線のことを「無差別曲線」と呼んできました。「効用の高さが同じ＝無差別」ということが理解できれば、効用の山の等高線を「無差別曲線」と呼ぶことも、納得出来るでしょう。

さて、ここで問題は、図 11**(A)** で示されている予算線の中の点で、効用水準が最も高くなる点を選ぶことです。そこで、図 11 の **(A)** と **(B)** を重ね合わせた図 12 を見てみます（図を見やすくするために U_5〜U_8 までの高さの等高線（無差別曲線）は省略してあります）。

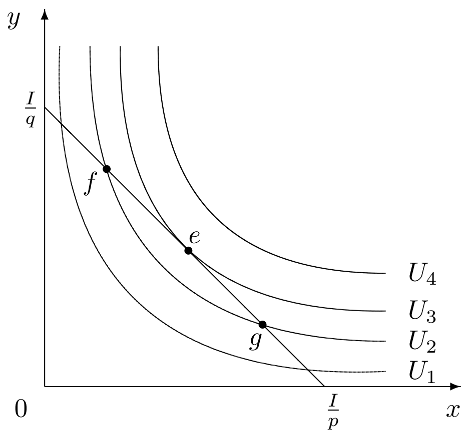

図 12: 効用最大化問題

図 12 を眺めていると、右下がりの線分で表される予算制約の中で、効用水準が最も高くなる点は、点 e であることに気づきます。例えば、点 e 以外の点 f や点 g は、予算制約式を満たす点ですが、点 e の時の効用水準 U_3 よりも低い効用水準 U_2 しか実現できていません。

そして、予算線上で U_3 より高い効用を実現することは不可能で、予算線上で効用が最大化される点（e）では、予算線と無差別曲線が接するという特徴があることがわかります。つまり、効用最大化問題の解は、予算線と無差別曲線が接する点として図解することができます。

補論 2：利潤最大化問題と 1 階条件

利潤最大化問題を図解し、1 階条件の直感的な意味について理解しよう。

利潤 $\Pi(x) \equiv px - C(x)$ を x を上手に選んで最大化する以下の利潤最大化問題を図解してみます。

$$\max_{x} \ px - C(x)$$

図 13**(A)** は、横軸に生産量 x、縦軸に収入や費用の額（円）をとったグラフで、収入 px と費用 $C(x)$ の図を描いています。収入は x が増えるに従って、p の傾きで増えていきます。一方、費用関数 $C(x)$ は、x の増加に伴い費用がどんどん増加していくという形状が仮定されています。

利潤 $\Pi(x)$ は、収入から費用を引いたものですので、px を示す直線と曲線 $C(x)$ の差です。その大きさを描いたのが図 13**(B)** です。利潤が最大となるのは、関数 $\Pi(x)$ の傾きが 0 となる点 x^* です。

一般に、関数 $\Pi(x)$ のように山の形をしている関数の値が最大化されるのは、山の傾きが 0 となる「山の頂点」です。関数の傾きは、数学的には「関数の微分」として表現されます。したがって、関数の値が最大される点では、関数の微分が 0 であるという特徴があることがわかります。

関数 $\Pi(x)$ の微分は、$\frac{\mathrm{d}\Pi(x)}{\mathrm{d}x}$ あるいは $\Pi'(x)$ と書かれ、後者の記号を使えば、$\Pi'(x) = 0$ が最大化問題の解を特徴づける式となります。この条件は、図 13**(A)** では、px を表す直線と曲線 $C(x)$ の傾きが同じという条件となります。限界費用と呼ばれる費用曲線の傾き $C'(x)$ と価格 p が一致するというのが、完全競争市場で利潤最大化を特徴づける条件式であることは、経済学ではよく知られています。

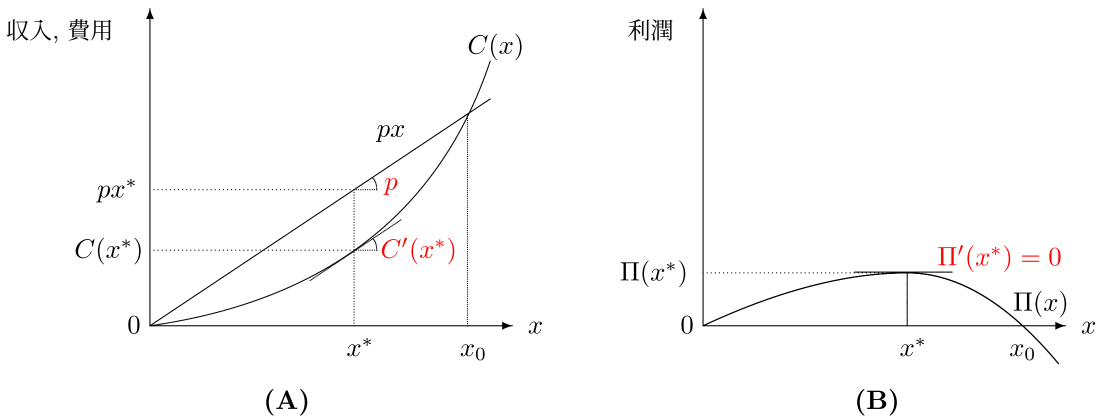

図 13: 収入・費用・利潤

一般に、1つの変数 x に依存する関数 $F(x)$ の最大化の条件は、$F'(x) = 0$ という条件で特徴付けられますが、これは、最大化されている場合に成立している必要があるという「必要条件」です（関数を1回微分した条件で示されますので**1階条件**とも呼ばれています）。実は、傾きが0になるという特徴は、最大点（山の頂上）だけでなく最小点（谷底）でも見られます。

そこで、頂点と谷底の違いを考えてみると、頂上では、山の傾き（微分）が頂上に近づくにつれて徐々に小さくなるという特徴があります（谷底では傾きがだんだん大きくなっていきます）。これは、傾きの傾きがマイナスになるということで、数学的には関数を2回微分した値がマイナスであればよいということになります。つまり、$F''(x^*) < 0$ は、点 x^* で関数 $F(x)$ が最大化されることを保証する条件で、**2階条件**と呼ばれています。

次に、2つの変数 x と y に依存する関数 $F(x, y)$ の値が最大化される点の特徴を考えてみます。最大点があるような関数 $F(x, y)$ は、x-y 平面の上にそびえ立つ山や丘のような形をしていて、頂点では、どの方向から見ても傾きが0となっているという特徴があります。x の方向の傾きを示す「関数 $F(x, y)$ の x による**偏微分**」は、$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ あるいは $F_x(x, y)$ と書かれますが、後者の記号を使えば $F_x(x, y) = 0$ が最大点の条件の一つとなります。そして、y の方向の傾きを示す関数 $F(x, y)$ の y による偏微分が0となること、つまり $F_y(x, y) = 0$ が、もう一つの条件となります。

さらに、関数が $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ のように多変数に依存する場合、1階条件は、関数 F のすべての変数による偏微分が0、つまり

$$F_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, F_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, F_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{26}$$

となります。また、選択できる点に制約 $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ がある中で、関数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を最大化するという問題

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{s.t.} \quad G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{27}$$

を解く場合も、実は、ラグランジュ関数 $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \equiv F(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を定義し、それを最大化するような条件

$$\mathcal{L}_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0, \mathcal{L}_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0, \dots, \mathcal{L}_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0 \tag{28}$$

および $\mathcal{L}_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ が、制約付きの最大化問題の1階条件（必要条件）となることが、**ラグランジュ未定乗数法**として知られています（新しく導入した変数 λ はラグランジュ乗数と呼ばれます）。

なお、以上の条件は、関数が微分可能で、最適点が制約の内側にある「内点解（Interior Solution）」を特徴づける条件です。最適点が制約の端点に来る「端点解（Corner Solution）」の場合、あるいは関数が微分可能でない場合には、異なる特徴づけが必要になります。