ギオーム・ハーリンジャー著、栗野盛光訳

「マーケットデザイン：オークションとマッチングの理論・実践」（中央経済社発行）

付録（熊野太郎訳）

付録 A: ゲーム理論

ゲーム理論は、相互に影響し合う状況を分析するのに役立つ構造化された言語を提供する。そのような状況では、複数の個人が意思決定を行い、結果（各人の厚生）は各人の選択に依存する。この章はオークションとマッチング市場の分析に必要なゲーム理論の基礎概念を簡潔に導入することを目的とする。

A.1 戦略形ゲーム

A.1.1 定義

戦略形ゲームは、他者の意思決定を知ることなく自らが意思決定を行う状況を表現する。

定義 A.1 3 つの要素が**戦略形ゲーム**（**標準形ゲーム**とも呼ばれる）を構成する。

- **プレイヤー**と呼ばれる個人の集合 $N = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$、
- 各プレイヤー $i \in N$ のもつ**純粋戦略** S_i、
- 各プレイヤ各 $i \in N$ の利得関数 u_i。利得関数は、全てのプレイヤーのあらゆる行動の組に対して、プレイヤーが得る利得を定める。よって u_i は $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ から $\mathbb{R}$ への関数となる。

ゲームを $G = \langle N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ と書く。**戦略の組** $s = (s_1, \cdots, s_n)$ （**結果**とも呼ばれる）は各プレイヤーの戦略を 1 つずつ集めたベクトルである。全てのプレイヤーの行動の集合が有限である場合、ゲームは有限であるという。

例 A.1 一般に有限ゲームは表で簡単に表すことができる。以下のゲーム $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ を考える。

- $N = \{$ アリス (Alice), ボブ (Bob)$\}$
- $S_{Alice} = \{U, D\}$、$S_{Bob} = \{L, R\}$。このゲームでは、アリスは 2 つの純粋戦略 U と D、ボブも 2 つの純粋戦略 L と R をもつ。

ゲームを定義するためには、あとアリスとボブの利得関数を定める必要がある。つまり、全ての可能な戦略の組に対して、アリスとボブの利得を表す必要がある。

この例では、戦略の組が 4 つある。それは (U, L)、(U, R)、(D, L)、(D, R) である。ここで (U, L) はアリスが戦略 U を、ボブが戦略 L をプレイしていることを表す。残りの戦略の組についても同様の解釈である。

表 A.1

２人のプレイヤーが２つの戦略をもつシンプルなゲーム

	L	R
U	$3,2$	$0,0$
D	$1,0$	$2,9$

この簡単な例では、表 A.1 のように利得を容易に表現できる。

表のそれぞれのセルには２つの数が入っている。左の数はアリスの利得を、右の数はボブの利得を表す。例えば、アリスが戦略 D を、ボブが戦略 L をプレイしたとき、アリスは 1 の利得を、ボブは 0 の利得を得る。

表 A.1 はゲームを完全に描写している。２人のプレイヤーがいて、１人は行を選択し、もう１人は列を選択する。２人の利得がアリスとボブの可能な戦略の組に対して表示されている。

戦略の組 s を考察するとき、しばしば１人のプレイヤー以外の残りのプレイヤーの戦略に着目することがある。例えば、プレイヤー i 以外のすべてのプレイヤーの行動に興味がある場合、残りのプレイヤーの行動の組を s_{-i} と書き、それは

$$s_{-i} = (s_1, s_2, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n)$$

という行動の組を表す。この表現を使うと戦略の組 s は (s_i, s_{-i}) とあらわすことができる。プレイヤー i の戦略 s_i と他のすべてのプレイヤーの戦略 s_{-i} という意味になる。

A.1.2 純粋戦略と混合戦略

既に説明したように、ゲーム理論では表 A.1 のゲームで与えられる戦略 U, D, L, R は純粋戦略と呼ばれる。これらはプレイヤー達が最終的にプレイする戦略または行動である。それぞれの純粋戦略に確率を割り振ることで、戦略の概念を確定的でないプレイにまで拡張することが分析に有益な場合がある。純粋戦略を確率的にプレイするような戦略を**混合戦略**と呼ぶ。

混合戦略は、ゲームの事前に行うプレイの計画であると理解しておくことは重要である。つまり、プレイヤーが混合戦略を使う場合、それはプレイヤーが混合戦略に従って純粋戦略を少しずつ混ぜた「新しい戦略」をプレイするわけではなく、純粋戦略をそれぞれの確率に従ってプレイすることを意味する。

定義 A.2 プレイヤー i の混合戦略は純粋戦略上の確率分布である。

混乱を避けるために、純粋戦略をラテン文字で、混合戦略をギリシャ文字で書くことにする。プレイヤー i の純粋戦略の集合 S_i について、混合戦略は $\sigma_i : S_i \to [0,1]$ という、それぞれの純粋戦略 s_i に $\sigma_i(s_i) \geq 0$ の確率を割り振る関数で表される。混合戦略の別表現として、$\Delta(S_i)$ を純粋戦略の集合 S_i 上のすべての確率分布の集合とすると、混合戦略は単に $\Delta(S_i)$ の要素である。σ_i は確率分布なので、$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$ となることに注意せよ。

例えば、表 A.1 のゲームにおけるアリスの混合戦略の１つは、

- U を確率 $\frac{2}{3}$ でプレイ
- D を確率 $\frac{1}{3}$ でプレイ

である。この混合戦略を σ_i とすると、より簡潔な形で

- $\sigma_{Alice}(U) = \frac{2}{3}$
- $\sigma_{Alice}(D) = \frac{1}{3}$

と書き直すことができる。

注意 A.1 純粋戦略をプレイすることは、混合戦略においてその純粋戦略を確率 1 でプレイし、それ以外の純粋戦略を確率 0 でプレイすることと等しいので、どのような純粋戦略も混合戦略の 1 つである。

混合戦略の組 $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ は各プレイヤーの混合戦略を 1 つずつ集めたベクトルである。σ をある混合戦略の組とすると、純粋戦略の組 $s = (s_1, \cdots, s_n)$ がプレイされる確率 $\sigma(s)$ は、各プレイヤーが s_i をプレイする確率を掛け合わせることで

$$Prob(s \text{ is played}) = \sigma(s) = \sigma_1(s_1) \times \sigma_2(s_2) \times \cdots \times \sigma_n(s_n)$$

となる。

混合戦略の組もまた純粋戦略の組上の確率分布である。これを見るために、表 A.1 のゲームに立ち戻り、次の混合戦略を考える。

- $\sigma_{Alice}(U) = \frac{2}{3}$、$\sigma_{Alice}(D) = \frac{1}{3}$
- $\sigma_{Bob}(L) = \frac{1}{4}$、$\sigma_{Bob}(R) = \frac{3}{4}$

ここで、純粋戦略の組 (U, R) がプレイされる確率は

$$\sigma_{Alice}(U) \times \sigma_{Bob}(R) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

である。他の純粋戦略の組に対しても同様に確率を計算すると、(U, L)、(D, L)、(D, R) についてそれぞれ $\frac{1}{6}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{4}$ である。これら 4 つの確率を足し合わせると、$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = 1$ となる。

混合戦略まで考慮した際のプレイヤーの利得は、**期待利得**により純粋戦略の組に対して定義された利得関数から容易に導出される。ここで期待利得は、純粋戦略の組上の確率分布に対する利得の期待値である。混合戦略に対する利得を定義するために、利得関数 $(u_i)_{i \in N}$ を以下のように拡張する。$G = \langle N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ を任意のゲームとする。混合戦略の組 $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ におけるプレイヤー i の利得は

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s)$$

となる。

先の例における混合戦略の組 σ の場合、アリスの利得は、

$$\begin{aligned} u_{Alice}(\sigma) &= \sigma(U, L) u_{Alice}(U, L) + \sigma(U, R) u_{Alice}(U, R) \\ &\quad + \sigma(D, L) u_{Alice}(D, L) + \sigma(D, R) u_{Alice}(D, R) \\ &= \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{12} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

と得られる。

A.2 展開形ゲーム

戦略形ゲームと異なり、展開形ゲームはプレイヤーがプレイする前に他のプレイヤーが既にとった行動を観察している状況をも捉えることが可能である。言い換えると、展開形ゲームは、他のプレイヤーがプレイする前にプレイヤーが行動する状況を分析することを可能とする。

A.2.1 定義

展開形ゲームは戦略形ゲームよりも複雑である。プレイヤーの集合とプレイヤーの全ての行動の組み合わせに対する彼らの利得を明確にするだけではなく、プレイの順序とゲームの中でプレイヤーが観測できるものとできないものをも明確にしなければならない。重要な概念は**ヒストリー**である。ヒストリーは、プレイヤー達が既にとった行動をまとめたものである。ヒストリーと共に、まだゲームの終りに到達していないヒストリーにおいて、その直後にどのプレイヤーが行動するべきかも明確にしなければならない。正式な定義を与える前に、逐次的なゲームの例をまず紹介する。

例 **A.2** 図 A.1 のグラフは展開形ゲームの描写である。

このゲームでは、アリスとボブの 2 人のプレイヤーがいる。ゲームはアリスから始まり、 2 つの**行動** A か B を選ぶ。

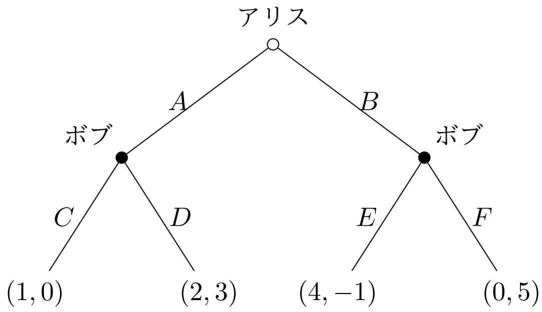
アリスが一旦プレイすると、ボブの手番となる。もしアリスが A をプレイすると、ボブは C か D をプレイすることかでき、彼女が B をプレイすると、E か F をプレイすることになる。

このような戦略的相互関係の表現は、あるプレイヤーが他のプレイヤーよりも<u>先に</u>プレイし、そのプレイが他のプレイヤーに観測されるという状況を描写していると見做すことができる。このゲームでは、ボブがとれる行動はアリスのプレイに依存する。言い換えると、ボブが C か D をプレイしなければならないならば、アリスが A をプレイしたことが推察できる。

ボブがプレイした後、プレイヤー両者の利得が確定する。例えば、アリスが A をプレイし、ボブが C をプレイすると、アリスの利得は 1、ボブの利得は 0 となる。同様に、アリスが B をプレイし、ボブが E をプレイすると、アリスの利得は 4、ボブの利得は -1 となる。

例 A.2 の重要な点は、ボブの手番が回ってきたとき、彼はアリスのプレイを観測していることである。つまり、ボブはゲームにおいて自分のおかれた状況を<u>完全に</u>把握できる。すべてのプレイヤーがプレイのヒストリーを完全に観察できるとき、そのゲームは、**完全情報ゲーム**と呼ばれる。A.2.3 ではどのように不完全情報に対処するかを扱う。これから展開形ゲームを正式に定義する。

図 A.1
展開形ゲーム



定義 A.3 次の要素が、完全情報下の展開形ゲームを構成する。

- **プレイヤー**の集合 $N = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$。
- **ヒストリー**の集合 H。典型的なヒストリーはプレイヤー達によってプレイされた行動の配列である。H は以下の性質を満たす：
  - 空ヒストリー $\emptyset$（まだ誰もプレイしていないというヒストリー）は H に含まれる。
  - $(a^1, a^2, \cdots, a^k)$（最初に a^1 という行動がとられ、次に a^2 という行動がとられ、といったヒストリー）が H に含まれるならば、$(a^1, a^2, \cdots, a^h)$ $(h < k)$ という**サブヒストリー**も H に含まれる。

  ヒストリー $(a^1, \cdots, a^k) \in H$ が**終着**であるとは、$(a^1, \cdots, a^k, a^{k+1}) \in H$ となるような a^{k+1} が存在しないことをいう。終着ヒストリーの集合を Z で表す。
- 終着ヒストリーでない各ヒストリー h に対して、手番となるプレイヤーを割り当てる関数 P。
- 任意のプレイヤー $i \in N$ について、利得関数 u_i は各終着ヒストリーにおける i の利得を表す。

例 A.2 では、行動は A, B, C, D, E, F である。空ヒストリーは一番上の頂点に対応し、アリスがプレイする。この時点ではまだ行動はプレイされていない。すべてのヒストリーは、

$$\begin{aligned}
&h_0 = (\emptyset),\ h_1 = (\emptyset, A),\ h_2 = (\emptyset, B)\\
&h_3 = (\emptyset, A, C),\ h_4 = (\emptyset, A, D)\\
&h_5 = (\emptyset, B, E),\ h_6 = (\emptyset, B, F)
\end{aligned}$$

である。

ヒストリー h_3 は終着ヒストリーである。なぜなら、このヒストリーの終わりに到達した時点でいかなる行動もとられないからである。対照的に、ヒストリー h_2 は終着ヒストリーではない。なぜなら、h_2 の終わり到達すると、E か F の行動がプレイされるからである。よって、終着ヒストリーは h_3, h_4, h_5, h_6 となる。

定義 A.3 の関数 P は終着ヒストリーでないヒストリーの終わりに到達したとき、どのプレイヤーがプレイすべきかを示す。終着ヒストリーでないヒストリーは、h_0, h_1, h_2 である。h_0 の終わりでは、アリスの手番となる。つまり、彼女が h_0 の後に h_1 または h_2 のどちらに進むかを決定するプレイヤーである。よって、$P(h_0) =$ アリス である。同様に、$P(h_1) = P(h_2) =$ ボブ となる。

A.2.2 戦略

展開形ゲームを定義または描写するとき、これまで行動という言葉を使い、戦略という言葉を避けてきた。展開形ゲームでは、プレイヤー達に当然戦略があるが、これには正確な定義がある。

戦略を正式に定義する前に、もう 1 つ表記を追加する。h を終着でないヒストリーとする。$A(h)$ をヒストリー h の終わりにプレイすべきプレイヤーが選択可能な行動とする。

$$A(h) = \{a : (h, a) \in H\}$$

$A(h)$ は、行動「a」をヒストリー h の終わりに選択するヒストリーが H で定義されているような行動 a の全ての集合である。例 A.2 では、$A(h_1) = \{C, D\}$ である。つまり、ヒストリー h_1 の終わりはボブの手番となるが、彼は C または D をプレイすることができる。一方で、$E \notin A(h_1)$ である。これは、$(h_1, E) = (\emptyset, A, E)$ というヒストリーはこのゲームのヒストリーには含まれないからである。

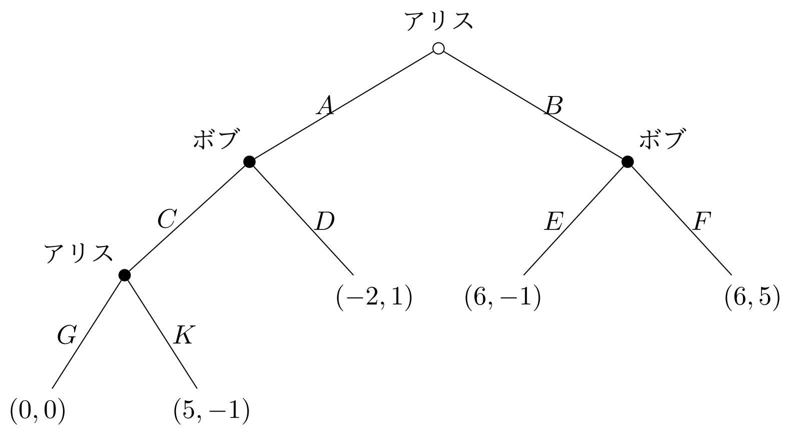
定義 A.4 展開形ゲームにおけるプレイヤー i の**戦略**は、i の手番となる（$P(h) = i$）すべての終着でないヒストリー h において、$A(h)$ のいずれかの行動を割り当てる関数である。

つまりプレイヤーの戦略は、到達するかしないかに関わらず、そのプレイヤーの手番となる**すべての**ヒストリーに対して、行動を規定しなければならない。

例 A.2 のゲームを考えると、アリスにとっては彼女の手番となるヒストリーが h_0 のみなので簡単である。アリスの戦略は A または B である。ボブについてはもう少し注意が必要である。彼の手番となるヒストリーは h_1, h_2 の 2 つがある。よってボブの戦略は、h_1 において何をするか、h_2 において何をするか、を明確にしなければならない。例えば「h_1 で C をプレイし、h_2 で F をプレイする」は戦略である。しかし、C それのみは戦略ではない。なぜなら、ボブがどの手番で何をするかを明確にしていないからである。

図 A.2

展開形ゲーム



例 A.3 図 A.2 に描かれた展開形ゲームを考察する。

このゲームでは、アリスに手番が 2 度回ってくる可能性がある。それがアリスが最初に A を選び、ボブが次に C を選んだ場合に該当する。よってアリスの手番となるヒストリーは $(\emptyset)$, $(\emptyset, A, C)$ の 2 つである。アリスのいかなる戦略もこの 2 つのヒストリーに対して行動を規定しなければならない。例えば、(A, G) （慣習として第 1 成分を空ヒストリーにおける行動、第 2 成分を $(\emptyset, A, C)$ のヒストリーにおける行動を表してい

る）はアリスの戦略である。このゲームにおけるアリスの戦略集合は、

$$\{(A,G),(A,K),(B,G),(B,K)\}$$

となる。

例 A.3 のアリスの戦略 (B,K) は、整合性がないようにみえるかもしれない。なぜなら、アリスが B をプレイすると、彼女には K をプレイする機会が絶対に訪れないからである。しかし、戦略をこのように定義するのはいくつか理由がある。

ゲーム理論の目的は戦略的相互関係の分析にある。戦略的相互関係とは、プレイヤーの選択が他のプレイヤーの選択によってどのように影響を受けるか、ということである。例 A.3 のゲームでは、もしアリスが A をプレイしたならばボブは D をプレイしようとするかもしれないので、アリスは A を行動したいかもしれない。なぜボブは D をプレイするのであろう？それは単に、ボブが C をプレイするとアリスが K をプレイしようとするからである。つまり、ボブが C をプレイするならばアリスが K をプレイするという計画は、ボブの選択に影響を及ぼしている。そしてそれはまたアリスの A か B の選択に影響を及ぼしている。

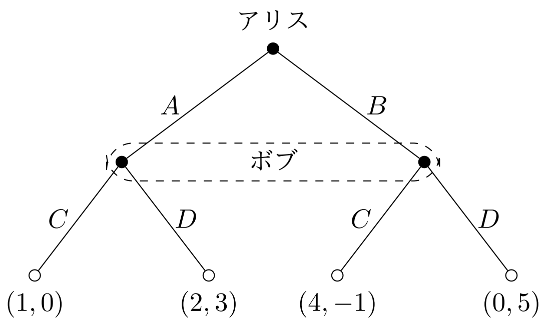
A.2.3 不完全情報

A.2.1 で描写した展開形ゲームでは、各プレイヤーは自らの手番が回って来たときにそれ以前にプレイされた行動を完全に観察できる。これが、このゲームが完全情報ゲームと呼ばれる所以である。展開形ゲームは、プレイヤー達がヒストリーに関して不完全な知識しかもっていないかもれしれない、というより広範な状況にも適用できる。

例 A.4 図 A.3 は不完全情報の展開形ゲームを描写している。これは例 A.1 のゲームに非常に似通っている。

図 A.3

展開形ゲーム



アリスにとっては何も変更がない。彼女は、空ヒストリーにおいて手番が回って来て A か B を選ばなければならない。

ボブはアリスの後に手番が回って来るが、今回はその手番において先にアリスが何をプレイしたかを観測できない。図 A.3 では 2 つのヒストリーを点線で囲むことで、ボブの手番に対応する 2 つのヒストリーが 1 つの集合にまとめられていることを表現する。この集合を**情報集合**と呼ぶ。

今、ボブのとれる行動が C と D の 2 つしかないことに注意せよ。ボブにとって選択可能な行動の集合はアリスが何をプレイしたかに依存すべきではない。プレイに依存してしまうと彼はアリスの選択を推測できてし

まう。

不完全情報下における展開形ゲームを正式に定義する。ゲームのほとんどの要素は定義 A.3 と同じであるので、それらは説明なしに列挙する。「黒丸」で新しい要素を示す。

定義 A.5 以下の要素が**展開形ゲーム**を構成する。

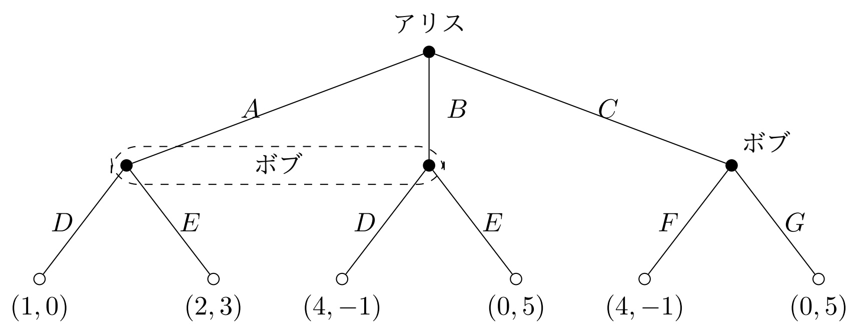
- ○ プレイヤーの集合 N。
- ○ ヒストリーの集合。
- ○ 終着でないヒストリーにプレイヤーを割り当てる関数 P。
- ● 各プレイヤー $i \in N$ に対して、$P(h) = i$ となる全てのヒストリーの分割。2 つのヒストリー h と h' が分割の同じ要素に含まれる時、$A(h) = A(h')$。分割の要素を**情報集合**と呼ぶ。
- ○ それぞれのプレイヤーに対して、各終着ヒストリーにおける利得を規定した利得関数。

例 A.4 ではボブの分割はただ 1 つの要素 $\{h_1, h_2\}$ をもつ。ここで $h_1 = (\varnothing, A)$ かつ $h_2 = (\varnothing, B)$。

図 A.4 のゲームでは、ボブは次の 3 つのヒストリーの後にプレイすることができる、$h_1 = (\varnothing, A)$、$h_2 = (\varnothing, B)$、$h_3 = (\varnothing, C)$。定義 A.5 に対応するこれら 3 つのヒストリーの分割は $\{\{h_1, h_2\}, \{h_3\}\}$ となるので、分割は要素を 2 つもつ。

図 A.4

展開形ゲーム



ボブは、ヒストリー h_1 と h_2 の後アリスが何をプレイしたか観察できないので、この 2 つのヒストリーは同じ情報集合 $\{h_1, h_2\}$ に属する。よって 2 つのヒストリーに配される行動は同じ D、E である。アリスが例えば A をプレイした後、ボブは彼女が A と B のどちらをプレイしたかは観察できないが C をプレイしなかったことは観察できる。それはヒストリー h_3 が異なる情報集合に含まれるためである。同様に、アリスが C をプレイすると、ボブはそれを観察できる。それは h_3 を含む分割の要素がただ h_3 のみを含むからである。言い換えると、ボブが F か G をプレイするとき、ボブはどのヒストリーの終わりにいるのかを迷いなく認識できる。

戦略の定義は不完全情報の展開形ゲームの場合に自然に拡張できる。戦略は単に**各情報集合**に対する行動の計画によって構成される。ゆえに図 A.4 のゲームでは、ボブの戦略は次の 4 つである。

$$(D, F), (D, G), (E, F), (E, G)$$

ここで 1 つの行動は 1 つの情報集合に対応している。

注意 A.2 完全情報ゲームは必然的に不完全情報ゲームでもあることに注意せよ。完全情報ゲームでは、いかなる 2 つのヒストリーも同じ情報集合に属さない。つまり 1 つの情報集合は 1 つのヒストリーのみで構成される。

A.3 ゲームを解く

A.3.1 被支配戦略と支配戦略

ゲームが一旦定義されると、最初に生まれる疑問の 1 つはプレイヤーが選ぶ戦略について何かしらの予測を立てることができるかどうかである。いくつかのゲームでは明らかにそのような予測ができる。これを見るために、表 A.2 に描かれるゲームを考える。ここでアリスは行（純粋戦略は $\{U, M, D\}$）を選ぶプレイヤーで、ボブは列（純粋戦略は $\{L, R\}$）を選ぶプレイヤーである。

表 **A.2**
被支配戦略のあるゲーム

	L	R
U	$3, 1$	$9, 5$
M	$5, 3$	$7, 6$
D	$4, 10$	$4, 1$

このゲームをよく見ると、ボブが何をプレイしようと、アリスは D よりも M をプレイすることで厳密に高い利得を得られる。実際、ボブが L をプレイするとアリスの利得は M をプレイしたとき 5、D をプレイしたとき 4 である。ボブが R をプレイするとアリスの利得は M をプレイしたとき 7、D をプレイしたとき 4 である。もしボブが混合戦略を使ったとしても、アリスの利得は D をプレイするよりも M をプレイした方が高くなる。ボブの混合戦略を σ_{Bob} とすると、σ_{Bob} は $\{L, R\}$ 上の確率分布なので、$\sigma_{Bob}(R) = 1 - \sigma_{Bob}(L)$ である。よって

$$u_{Alice}(M, \sigma_{Bob}) = \sigma_{Bob}(R) \times 5 + (1 - \sigma_{Bob}(R)) \times 7 = 7 - 2\sigma_{Bob}(R)$$

かつ

$$u_{Alice}(D, \sigma_{Bob}) = \sigma_{Bob}(R) \times 4 + (1 - \sigma_{Bob}(R)) \times 4 = 4$$

を得る。$0 \le \sigma_{Bob}(R) \le 1$ なので、$5 \le u_{Alice}(M, \sigma_{Bob}) \le 7$ より $u_{Alice}(M, \sigma_{Bob}) > u_{Alice}(D, \sigma_{Bob})$ となる。

ゲーム理論の言葉では、この戦略 D を**強く支配される**と呼ぶ。

定義 A.6 プレイヤー i にとって純粋戦略 s_i が**強く支配される**とはある混合戦略 σ_i が存在して、全ての $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \tag{A.3}$$

となることである。プレイヤー i にとって純粋戦略 s_i が**弱く支配される**とはある混合戦略 σ_i が存在して、全ての $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \tag{A.4}$$

となり、かつ少なくとも 1 つの純粋戦略の組 s_{-i} が存在して $u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ となることである。

定義 A.6 では、プレイヤー i の相手の戦略は純粋戦略のみを考えているが、これは一般性を失わない。なぜなら式 (A.3) と (A.4) の不等式がプレイヤー i の相手の全ての純粋戦略 s_{-i} について満たされていることは不等式が全ての σ_{-i} で満たされていることと同値だからである。

ある戦略が他の純粋戦略によって支配されているかどうかを考えるとき、純粋戦略だけでなく混合戦略についても考えていることは重要である。表 A.3 に描かれるゲームがこのことを示している。ここでもう一度、行をプレイするアリスと列をプレイするボブを考える。

表 A.3

混合戦略による支配

	L	R
U	$2,2$	$7,4$
M	$3,5$	$3,2$
D	$6,1$	$2,2$

このゲームでは、いかなる純粋戦略も他の純粋戦略によって支配されない。しかし、純粋戦略 M は $\sigma_{Alice}(U) = \frac{1}{2}$、$\sigma_{Alice}(D) = \frac{1}{2}$ という混合戦略に支配される。

前節でみたものよりも極端なケースは常に最も高い利得を与える戦略が存在するときである。例えば、表 A.4 のアリスとボブのゲームを考える。ここで $S_{Alice} = \{U, M, D\}$ かつ $S_{Bob} = \{L, R\}$ である。

表 A.4

支配戦略のあるゲーム

	L	R
U	$7,2$	$5,4$
M	$3,1$	$2,2$
D	$4,1$	$1,2$

このゲームでは、アリスの戦略 M も D も強く支配されることが容易に見てとれる。もしアリスが常に利得を最大化する戦略を選ぶ**合理的プレイヤー**であれば、戦略 U が常により高い利得を与えるので、戦略 M や D を選ぶことはない。

定義 A.7 プレイヤー i にとって、純粋戦略 s_i が**強支配戦略**であるとは、どのような混合戦略 σ_i、全ての $s_{-i} \in S_i$ についても

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \tag{A.5}$$

となることである。プレイヤー i にとって、純粋戦略 s_i が**弱支配戦略**であるとは、どのような混合戦略 σ_i、全ての $s_{-i} \in S_i$ についても

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, s_{-i}) \tag{A.6}$$

となり、かつ少なくとも 1 つの純粋戦略の組 s_{-i} が存在して $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i})$ となることである。

プレイヤーの戦略に強支配戦略があるとき、他の全ての戦略は強く支配されることに注意せよ。同様に、プレイヤーの戦略に弱支配戦略があるとき、他の全ての戦略は弱く支配される。

戦略 s_i が s_i' に支配されるとき、s_i' が支配戦略であることを意味しないことに注意せよ。表 A.5 のゲームはこの違いを示している。行を選ぶプレイヤーにとって戦略 D は M に支配される。列を選ぶプレイヤーが L と R のどちらを選ぼうとも D よりも M がより高い利得を与えるからである。しかし、戦略 M は支配戦略ではない。

表 A.5
支配戦略と支配している戦略

	L	R
U	$1, 2$	$7, 4$
M	$3, 2$	$3, 1$
D	$0, 1$	$2, 2$

A.3.2 被支配戦略の消去

ある戦略が強く支配されるとき、その戦略は合理的なプレイヤーにプレイされることはないと予測できる。表 A.2 のゲームでは、アリスは戦略 D をプレイしないであろうことが予測できる。しかしさらに議論を進めることができる。もしボブがアリスが合理的であると知っていれば、彼はアリスが D をプレイしないことが分かる。するとボブはアリスのその戦略を無視することができ、彼女が U か M かそれらにのみ正の確率を振った混合戦略しかプレイしないだろうと想定する。

よってボブにとってのゲームはあたかも表 A.6 に描かれるゲームとなる。

表 A.6
表 A.2 から戦略 D を除いたゲーム

	L	R
U	$3, 1$	$9, 5$
M	$5, 3$	$7, 6$

この「制限」されたゲームでは、ボブの純粋戦略 L は強く支配される。もしアリスが

(i) ボブが合理的であること、

(ii) ボブがアリスが合理的であることを知っていること

を知っていれば、アリスは、戦略 L は支配されるのでボブは戦略 R をプレイするだろうと想定できる。この場合、アリスは表 A.7 のさらに制限されたゲームを考えることになる。

表 A.7
表 A.6 から戦略 L を除いたゲーム

	R
U	$9,5$
M	$7,6$

このゲームでは、戦略 M が強く支配されるので、唯一の結果として戦略の組 (U,L) に辿り着く。このように従ってきた手順を**強被支配戦略の繰り返し削除**と呼ぶ。

> **定義 A.8** ゲームが**強支配可解**であるとは、強被支配戦略の繰り返し削除がただ 1 つの戦略の組に辿り着くことである。

強被支配戦略の繰り返し削除はプレイヤーの合理性が**共有知 (common knowledge)** であることに依拠する。この意味は、ゲームの最初にプレイヤーが合理的であることは勿論のこと、さらに

(i) 各プレイヤーは、各プレイヤーが合理的であることを知っている。
(ii) 各プレイヤーは (i) を知っている。
(iii) 各プレイヤーは (ii) を知っている。
(iv) 各プレイヤーは (iii) を知っている。

$\cdots$ がずっと続くことを指す。
「各プレイヤーは $\cdots$ を知っている。」という主張がどれくらい繰り返されるかはゲームの戦略の数に依存する。有限ゲームでは、有限回のステップで十分である。
繰り返し消去の概念は弱被支配戦略にも応用できる。しかし戦略を消去する順番が強被支配戦略を考えるときには無関係である一方、弱被支配戦略を考えるときには問題となり結果に影響を及ぼす。これを見るために表 A.8 のゲームを考える。

表 A.8
弱被支配戦略の消去の順番が問題となるゲーム

	L	R
U	$3,4$	$4,3$
M	$5,3$	$3,5$
D	$5,3$	$4,3$

このゲームでは、M と U の両方が D によって弱く支配される。もし M を消去すると R が消去でき、よって U が消去できるので、(D,L) に辿り着く。一方で、もし U を消去することから始めると、L が今度は弱く支配されるので消去され、次に M が消去できるので (D,R) に辿り着く。この問題から残念ながら統一的または標準的な**弱支配可解**という定義は存在しない。以下の方法は全て受け入れ可能な定義である。

- ゲームが弱支配可解であるとは、唯一の戦略の組に辿り着くような弱被支配戦略の消去の順序が少なくとも 1 つ存在する。
- ゲームが弱支配可解であるとは、どのような弱被支配戦略の消去の順序であっても唯一の戦略の組に辿り着く。
- ゲームが弱支配可解であるとは、消去の各ステップにおいて全ての弱被支配戦略を消去していった結果が唯一の戦略の組に辿り着く。

A.3.3 ナッシュ均衡 (Nash equilibrium)

全てのゲームが支配可解とは限らない。そのような場合にも何かしらの予測は可能であろうか？ゲーム理論における最も汎用的な概念は**ナッシュ均衡**の概念である。

定義 A.9 ゲーム $< N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N} >$ において戦略の組 σ がナッシュ均衡であるとは、 全てのプレイヤー $i \in N$ について、

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \tag{A.7}$$

が全ての $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$ について成り立つことである。

定義 A.9 は、混合戦略による定義である。どのような純粋戦略も混合戦略であったことに留意せよ。混合戦略はナッシュ均衡を考える際、特に有用である。これを見るために表 A.9 にあるゲームを考える。ここでアリスは行を、ボブは列を選ぶ。

表 A.9

純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないゲーム

	L	R
U	$0,1$	$4,0$
D	$2,0$	$0,3$

このゲームでは純粋戦略のみを考えるとナッシュ均衡は存在しない。例えば、戦略の組 (U, L) について、これがナッシュ均衡であるためには、アリスにとって

$$u_{Alice}(U, L) \geq u_{Alice}(D, L) \tag{A.8}$$

が成立し、ボブにとって

$$u_{Bob}(U, L) \geq u_{Bob}(U, R) \tag{A.9}$$

が成立しなければならない。式 (A.8) は明らかに成り立たないので、(U, L) はナッシュ均衡たりえない。しかし混合戦略まで考慮するとナッシュ均衡を見つけられる。

例 A.5 表 A.9 のゲームを考える。ここで $S_{Alice} = \{U, D\}$ で $S_{Bob} = \{L, R\}$ とする。純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないことは確認したので、混合戦略を考える。アリスの混合戦略を σ_{Alice} とすると、純粋戦略は２つしかないので、

$$\sigma_{Alice}(D) = 1 - \sigma_{Alice}(U)$$

である。同様に、ボブの混合戦略を σ_{Bob} とする。

ナッシュ均衡を探す。既に純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないことを知っているので、一般性を失うことなく $0 < \sigma_{Alice}(U) < 1$ かつ $0 < \sigma_{Bob}(L) < 1$ を仮定する。

ナッシュ均衡を見つけるために、式 (A.7) を満たす σ_{Alice} と σ_{Bob} を見つける必要がある。アリスから考える。もし純粋戦略 U をプレイすると、利得は

- $\sigma_{Bob}(L)$ の確率で $u_{Alice}(U, L) = 0$ で
- $\sigma_{Bob}(R)$ の確率で $u_{Alice}(U, R) = 4$

となる。よってアリスが純粋戦略 U をプレイするときの期待利得は

$$u_{Alice}(U, \sigma_{Bob}) = 0 \times \sigma_{Bob}(L) + 4 \times \sigma_{Bob}(R) = 4\sigma_{Bob}(R)$$

となる。同様にして、彼女が純粋戦略 D をプレイするとき期待利得は $\sigma_{Bob}(L)$ の確率で $u_{Alice}(D, L) = 2$ と $\sigma_{Bob}(R)$ の確率で $u_{Alice}(D, R) = 0$ の和となる。よって

$$u_{Alice}(D, \sigma_{Bob}) = 2 \times \sigma_{Bob}(L) + 0 \times \sigma_{Bob}(R) = 2\sigma_{Bob}(L)$$

となる。

もしアリスが混合戦略 σ_{Alice} をプレイすると、$\sigma_{Alice}(U)$ の確率で $4\sigma_{Bob}(R)$ を $\sigma_{Alice}(D)$ の確率で $2\sigma_{Bob}(L)$ となるので、

$$u_{Alice}(\sigma_{Alice}, \sigma_{Bob}) = 4\sigma_{Alice}(U)\sigma_{Bob}(R) + 2\sigma_{Alice}(D)\sigma_{Bob}(L)$$

となる。

$(\sigma_{Alice}, \sigma_{Bob})$ が均衡であるとき、式 (A.7) が満たされるので、

$$u_{Alice}(\sigma_{Alice}, \sigma_{Bob}) > u_{Alice}(U, \sigma_{Bob})$$

かつ

$$u_{Alice}(\sigma_{Alice}, \sigma_{Bob}) > u_{Alice}(D, \sigma_{Bob})$$

が成り立つ。重要なステップは $u_{Alice}(U, \sigma_{Bob})$ と $u_{Alice}(D, \sigma_{Bob})$ を計算することである。

最初に $u_{Alice}(U, \sigma_{Bob}) > u_{Alice}(D, \sigma_{Bob})$ を想定する。つまり U をプレイすることが D よりもよい場合である。すると $4\sigma_{Bob}(R) > 2\sigma_{Bob}(L)$ である。

$$\begin{aligned}
u_{Alice}(\sigma_{Alice}, \sigma_{Bob}) &= 4\sigma_{Alice}(U)\sigma_{Bob}(R) + 2\sigma_{Alice}(D)\sigma_{Bob}(L) \\
&< 4\sigma_{Alice}(U)\sigma_{Bob}(R) + 4\sigma_{Alice}(D)\sigma_{Bob}(R) \\
&= \sigma_{Alice}(U)\sigma_{Bob}(R) + 4(1 - \sigma_{Alice}(U))\sigma_{Bob}(R) \\
&= 4\sigma_{Bob}(R) = u_{Alice}(U, \sigma_{Bob})
\end{aligned}$$

つまり、$u_{Alice}(U, \sigma_{Bob}) > u_{Alice}(D, \sigma_{Bob})$ であると σ_{Alice} は式 (A.7) を満たさない。同様の計算により $u_{Alice}(U, \sigma_{Bob}) < u_{Alice}(D, \sigma_{Bob})$ であるときも σ_{Alice} は式 (A.7) を満たさない。

よって σ_{Alice} が式 (A.7) を満たす唯一の可能性は

$$u_{Alice}(U, \sigma_{Bob}) = u_{Alice}(D, \sigma_{Bob})$$

$$\Leftrightarrow 4\sigma_{Bob}(R) = 2\sigma_{Bob}(L)$$

のときである。$\sigma_{Bob}(L) = 1 - \sigma_{Bob}(R)$ なので、

$$4\sigma_{Bob}(R) = 2\sigma_{Bob}(L) \Leftrightarrow 4\sigma_{Bob}(R) = 2(1 - \sigma_{Bob}(R)) \Leftrightarrow \sigma_{Bob}(R) = \frac{1}{3}$$

を得る。

同様の分析をボブに対しても重ねることで、$\sigma_{Alice}(U) = \frac{3}{4}$ を得る。混合戦略によるナッシュ均衡はこれより

アリスが U を $\dfrac{3}{4}$ の確率で、D を $\dfrac{1}{4}$ の確率でプレイする

ボブが L を $\dfrac{2}{3}$ の確率で、R を $\dfrac{1}{3}$ の確率でプレイする

となる。

例 A.5 では、混合戦略均衡を見つけるときに重要な性質を使った。それはあるプレイヤーがナッシュ均衡で混合戦略を使うとき、（期待）利得は混合戦略と正の確率でプレイされるどのような純粋戦略との間で等しいという性質である。

混合戦略は、ナッシュ均衡の存在を保証する意味で重要である。次の定理はジョン・ナッシュ自身によって確立された。

> 結果 **A.1 (Nash)** プレイヤーの数と純粋戦略の数が有限であるとき、どのようなゲームにも（混合戦略まで含めると）必ずナッシュ均衡が存在する。

A.4 ベイジアンゲーム：不完備情報のゲーム

これまで分析してきたゲームは**完全情報ゲーム**と呼ばれる。そこでは、各プレイヤーは他のプレイヤーの戦略集合と利得関数を知っていることを仮定していた。多くの現実の場面においては個人は相互に関わり合う人の全てを知っていることはないので、この仮定は明らかに限定的となる。**不完備情報ゲーム**、または**ベイジアンゲーム**はそのような状況を捉える設計になっている。

A.4.1 導入のための例

あるプレイヤー、アリスが他のプレイヤーと相互関係にあるとき、彼女は相手の利得を知らないかもしれない。しかし、アリスの相手の利得の可能性として幾つかの集合が存在すると仮定することはそれほどおかしなことではない。相手のプレイヤーは自身の利得が何であるかを知っているが、アリスは知らない。彼女はただ相手の利得についての様々な可能性があることを知っている。

この場合に使う技は「自然 (Nature)」を用いることである。「自然」は各プレイヤーに対して可能な利得関数の集合から利得関数を 1 つ選び、その利得関数を伝える。2 人のプレイヤー、アリスとボブがいるとき、それは以下のように進められるだろう。アリスは 2 つの可能な利得関数 u_A と $\hat{u}_A$ をもち、ボブも 2 つの可能な利得関数 u_B と $\hat{u}_B$ をもつ。ゲームが始まる前に自然はアリスとボブに 1 つずつ利得関数を選ぶ。アリスは自身の利得関数を知るがボブの利得関数は知らず、同様にボブも自身の利得関数を知るがアリスの利得関数は知らない。

ベイジアンゲームでは、一般に自然が各プレイヤーの利得関数を混合戦略のように確率的に選ぶことを仮定する。それは、自然がアリスにある確率で u_A をそれ以外の確率で $\hat{u}_A$ を選び、ボブにとっても同様に選ぶ。この際、それぞれの確率は同じである必要はない。この確率については全てのプレイヤーが知っているものとする。最後に、自然は利得関数をもたないという特別な立場にある。

例 A.6 アリスとボブをプレイヤーとする。アリスは 2 つの戦略 U, D を、ボブも 2 つの戦略 L, R をもつ。アリスは可能な利得関数として u_A, $\hat{u}_A$ を、ボブも同様に u_B, $\hat{u}_B$ をもつ。表 A.10 は可能な利得関数の組み合わせである。

表 A.10

不完備情報ゲーム

		u_B				$\hat{u}_B$	
		L	R			L	R
u_A	U	$3,1$	$5,10$	u_A	U	$0,1$	$1,6$
	D	$1,0$	$3,3$		D	$8,0$	$4,3$
		u_B				$\hat{u}_B$	
		L	R			L	R
$\hat{u}_A$	U	$0,4$	$4,1$	$\hat{u}_A$	U	$5,1$	$3,0$
	D	$2,3$	$6,2$		D	$1,0$	$1,3$

自然がアリスとボブの利得関数を選ぶとき、4 つの可能性がある。

- u_A と u_B。アリスとボブは表 A.10 の左上のゲームをプレイする。(U, R) がプレイされるときのアリスとボブの利得はそれぞれ 5 と 10 である。
- $\hat{u}_A$ と u_B。アリスとボブは表 A.10 の左下のゲームをプレイする。(U, L) がプレイされるときのアリスとボブの利得はそれぞれ 0 と 4 である。
- u_A と $\hat{u}_B$。アリスとボブは表 A.10 の右上のゲームをプレイする。(D, L) がプレイされるときのアリスとボブの利得はそれぞれ 8 と 0 である。
- $\hat{u}_A$ と $\hat{u}_B$。アリスとボブは表 A.10 の左上のゲームをプレイする。(U, L) がプレイされるときのアリスとボブの利得はそれぞれ 5 と 1 である。

もし自然が利得 u_A と $\hat{u}_B$ を選ぶと、

- アリスは自身の利得 u_A を知るが、ボブの利得は知らない。よって彼女は、自分が左上のゲーム（ボブが u_B）か右上のゲーム（ボブが $\hat{u}_B$）をプレイしているかが分からず、
- ボブは自身の利得 $\hat{u}_B$ を知るが、アリスの利得は知らない。よって彼は、自分が右上のゲーム（アリスが u_A）か右下のゲーム（アリスが $\hat{u}_A$）をプレイしているかが分からない、

ということになる。

A.4.2 定義

ここではベイジアンゲームの正式な定義を与えることから始め、その後、定義の詳細に触れていく。

定義 A.10 以下の要素が**ベイジアンゲーム**を構成する。

- **プレイヤー**と呼ばれる個人の有限な集合、$N = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$、
- 各プレイヤー $i \in N$ について、**行動**の集合、A_i、
- 各プレイヤー i について可能な**シグナル**の集合、T_i、
- シグナルの組 $T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$ 上の確率分布 f、
- 各プレイヤー $i \in N$ について、利得関数 u_i は全てのプレイヤーのあらゆる行動の組とシグナルの組に対してプレイヤー i の利得を決める。よって $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ とすると u_i は $A \times T$ から $\mathbb{R}$ への関数となる。

ベイジアンゲームでは、プレイヤー i の**純粋戦略**は各シグナル t_i に対して A_i の行動を定める関数 s_i となる。つまり、$s_i(t_i)$ はプレイヤー i がシグナル t_i を受け取ったとき s_i に従ってプレイする行動である。

よって、プレイヤーはまず確率分布 f からのシグナルを受け取る。2章でみたオークションのモデルでは、プレイヤー（買い手）にとってのシグナルは買い手の価値であり、それはある区間から無作為に抽出されていたので、分布 f は一様分布である。例 A.6 では $T_{Alice} = \{u_A, \hat{u}_A\}$ となる。

一旦、各プレイヤーが自身のシグナルを知ると、戦略に従った行動をプレイする。ベイジアンゲームにおける戦略の概念は展開形ゲームのそれと似ている。展開形ゲームではプレイヤーの戦略は、プレイヤーの手番になる全てのヒストリーに対して行動を明示しなければならなかった。ここでも同様に、戦略はプレイヤーが受け取るであろう全てのシグナルに対して行動を明示する。

プレイヤーの戦略の組 s を考える。$t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ をシグナルの組とするとプレイヤーは行動の組 $(s_1(t_1), s_2(t_2), \cdots, s_n(t_n))$ をプレイする。プレイヤーの利得は行動の組かつシグナルの組に依存する。よってシグナルの組 t が認識されたら、プレイヤー i は利得

$$u_i(s(t), t)$$

を得る。各プレイヤーは自身のシグナルのみを観察するので、プレイヤーの観点から戦略を考える際、利得は期待値になる。ここで期待値は他のプレイヤーのシグナル（と行動）に関して計算することになる。しかしこの期待値は既知である自身のシグナルで条件づけされることに留意せよ。

ようやくベイジアンゲームの均衡概念を定義する準備が整った。この均衡概念はナッシュ均衡をベイジアンゲームに適用したもので、ベイズ＝ナッシュ均衡という。

定義 A.11 （純粋）戦略の組 s がベイズ＝ナッシュ均衡であるとは、全てのプレイヤー i と全てのシグナル $t_i \in T_i$、全ての行動 $a_i \in A_i$ に対して、

$$E\Big[u_i\Big((s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i})), (t_i, t_{-i})\Big)|t_i\Big] \geq E\Big[u_i\Big((a_i, s_{-i}(t_{-i})), (t_i, t_{-i})\Big)|t_i\Big] \tag{A.10}$$

が成り立つことである。

式 (A.10) の左辺において $(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}))$ は各プレイヤー j がシグナル t_j を受け取ったときの行動の組である。プレイヤー i の利得 u_i は行動の組とシグナルの組 (t_i, t_{-i}) の両方に依存する。期待値は、自身のシグナルは知っているので、プレイヤー i のシグナル t_i に条件づけられている。

式 (A.10) は均衡戦略をプレイすることで得られる利得がそれとは異なる戦略をプレイすることで得られる利得以上でなければならないことを要求している。均衡戦略からの逸脱では、プレイヤーは $s_i(t_i)$ の代わりに

a_i といった戦略に従う行動だけが変えられる。一方で、プレイヤー i の利得関数は真のシグナル t_i に依存したままで、期待値は t_i に条件づけられたままとなる。よって式 (A.10) の不等式を挟んだ両辺の唯一の違いは左辺の $s_i(t_i)$ と右辺の a_i だけとなる。

例 **A.7** 簡単化のために、2 人のプレイヤー、アリスとボブによる不完備情報ゲームを考える。ここでアリスはただ 1 つのシグナルを、ボブは 2 つのシグナルを受け取るとする。次のような筋書きを考える。アリスは銀行を保有しており、新しい事業を展開しようとしているボブに融資するかしないかを決める。ボブのシグナルは「怠惰」か「勤勉」のどちらかであり、ボブが「怠惰」であるシグナルを受け取る確率を p、「勤勉」であるシグナルを受け取る確率を $1-p$ とする。

ボブは、事業のために働くまたは余暇にお金を使うことで遊ぶ、のどちらかの行動をとる。ゲームは表 A.11 となる。

表 A.11
アリスとボブの不完備情報ゲーム

	ボブは勤勉			ボブは怠惰	
	働く	遊ぶ		働く	遊ぶ
融資する	$9,10$	$3,4$	融資する	$6,3$	$1,6$
融資しない	$5,5$	$5,1$	融資しない	$5,0$	$5,3$

ボブが勤勉である場合、働くことは遊ぶことを支配している。彼が働くとき、アリスが融資するかどうかに依存するが、10 か 5 の利得を得られる一方で、遊ぶとたった 4 か 1 の利得を得る。しかしボブが怠惰である場合、遊ぶことが働くことを支配する。

ボブはいつでも自身のシグナル（よってどちらの利得表が適用されるか）を知っており、またアリスは 1 つのシグナルしかもたないことを知っているので、ボブの均衡における戦略は

- 勤勉ならば働く、
- 怠惰ならば遊ぶ、

となる。ボブの戦略を s_{Bob} とする。

アリスはボブのシグナルを観察できないので、ボブが怠惰か勤勉かが分からない。しかしながら彼女は、ボブが勤勉であれば働くことが遊ぶことを支配し、よって融資することが望ましいことを知っている。もしボブが怠惰であれば状況は真逆となる。ボブが怠惰であるとき遊ぶことは働くことを支配するので、アリスはもしボブのシグナルが怠惰であれば彼は遊ぶと知っている。よってアリスにとっては融資しない（利得は 4）ことが融資する（利得は 1）ことよりも望ましい。

アリスはボブのシグナルを観察できないが、その生起確率は知っている。アリスのシグナルは 1 つなので、1 つの行動のみがとれる。戦略はシグナルごとに行動を規定しているからである。つまりアリスは融資するかしないかを選ばなければならない。

- 融資する場合
  - ボブは p の確率で怠惰である。このとき彼は遊ぶので、確率 p でアリスの利得は 1 となる。ボブの利得は 6 である。
  - ボブは $1-p$ の確率で勤勉である。このとき彼は働くので、確率 $1-p$ でアリスの利得は 9 とな

る。ボブの利得は 10 である。

よってアリスの融資することによる期待利得は

$$u_{Alice}(\text{融資する}, s_{Bob}) = 1 \times p + 9 \times (1 - p)$$

である。

- <u>融資しない場合</u>
  - ボブは p の確率で怠惰である。このとき彼は遊ぶので、確率 p でアリスの利得は 5 となる。ボブの利得は 3 である。
  - ボブは $1 - p$ の確率で勤勉である。このとき彼は働くので、確率 $1 - p$ でアリスの利得は 5 となる。ボブの利得は 3 である。

  よってアリスの融資しないことによる期待利得は

  $$u_{Alice}(\text{融資しない}, s_{Bob}) = 5 \times p + 5 \times (1 - p)$$

  である。

これでアリスにとっての最適な戦略を見つけることができる。アリスは

$$u_{Alice}(\text{融資する}, s_{Bob}) > u_{Alice}(\text{融資しない}, s_{Bob})$$
$$\Leftrightarrow 1 \times p + 9 \times (1 - p) > 5 \times p + 5 \times (1 - p)$$
$$\Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$$

であれば融資することを好む。

よってボブが怠惰である確率が 1/2 よりも小さければ、アリスの最適戦略は融資することになる。彼女の期待利得は融資しないときよりも高くなる。結局、アリスの均衡戦略は

- $p \leq \frac{1}{2}$ ならば融資する、
- $p > \frac{1}{2}$ ならば融資しない、

となる。

$p = \frac{1}{2}$ の場合はどうなるのか？この場合、アリスは融資することとしないことについて無差別となる。どちらの行動をとっても同じ期待利得となる。よってもう 1 つのアリスの戦略、$p < \frac{1}{2}$ ならば融資する、$p \geq \frac{1}{2}$ ならば融資しない、も均衡戦略として可能である。

ここでは簡単化のために純粋戦略によるベイジアン均衡を定義した。ナッシュ均衡の場合と同様に、混合戦略を考えることも可能である。そのとき、次の結果が得られる。

結果 A.2 プレイヤーの数と純粋戦略の数、シグナルの数が有限であるようなゲームには（混合戦略まで考慮すれば）ベイジアン均衡が常に存在する。